

# 물가연동부채권 가격결정모형

(A Pricing Model for Inflation-indexed Bonds)

2008. 2.

안 동 현 , 김 상 수

본 논문은 주성분분석 (principal component analysis)을 통해 명목 이자율의 기간구조와 물가연동부채권의 이자율로부터 요인을 추출한 후 이들 요인들의 확률적 변화를 O-U process로 가정하여 명목채권과 물가연동부채권의 가격을 이론적으로 도출하였다. 특히 물가연동부채권의 복잡한 구조를 정확하게 반영한 이론가격을 도출함으로써 기존논문과 차별화를 가져왔고 동모형을 일본의 물가연동부 채권 자료에 적용하였다. 실증분석 결과는 동 모형이 일본의 실질이자율 및 명목이자율의 시계열 및 횡단면 공히 설명력이 우수한 것으로 밝혀졌으며 더 나아가 Fisher 가설이 기각됨을 밝혔다.

---

\* 본 논문은 김상수의 서울대 박사학위논문(2008)을 요약한 것임.

## 제 1장. 서론

인플레이션(inflation)은 경제에서 매우 중요한 역할을 담당하고 있다. 1970년대 높은 인플레이션을 경험했던 미국은 높은 인플레이션이 얼마나 경제에 악영향을 주는지를 잘 기억하고 있다. 특히 전후 초인플레이션(hyper-inflation)을 경험했던 국가들이나 경제위기를 거치면서 초인플레이션을 경험했던 국가들은 인플레이션의 위험을 경험적으로 체득하고 있다.

인플레이션을 회피하기 위한 노력은 다양하게 전개되어 왔는데, 증권시장을 통해서도 다양한 인플레이션 리스크의 헷징 상품들이 도입되어왔다. 그 중 대표적인 상품으로 물가연동부채권(Inflation-indexed Bonds)이 있다. 물가연동부채권이 최초로 도입된 시기는 1780년대 대혁명시절 메사츄츠주에서 발행된 것인데, 전쟁으로 인한 심한 인플레이션을 처리하고 군인들의 노여움을 달래기 위해 고안되었다.<sup>1)</sup> 이렇게 오래된 역사를 지닌 상품임에도 불구하고 미국은 1997년에야 도입되었고 아시아지역에서는 2004년 일본이 최초로 유일하게 도입하는 등 큰 꽃을 피우지는 못했다. 그러나 최근 금융시장의 발전과 더불어 투자자의 급증은 물가연동부채권 시장의 급성장을 가져왔다. 이스라엘에서는 물가연동부채권이 총 채권시장에서 80% 이상을 차지하고 있을 정도이다. 또한 최근 중국경제의 성장으로 인해 세계경제가 인플레이션에 빠질 우려가 되고 있는 상황에서 물가연동부채권의 매력은 더욱 커지고 있다.

물가연동부채권은 일반적으로 원금이 매일 인플레이션의 변화에 의해 조정되어 인플레이션으로부터 발생할 수 있는 미래의 현금흐름의 위험을 제거시켜준다. 즉, 명목적인 고정 수익률 대신 실질적인 고정 수익률을 제공하는 상품이다. 이러한 의미로 실질채권(real bond)으로 해석되고 불리워진다. 물가연동부채권에 대한 주된 관심은 인플레이션 리스크를 제어한다는 점에 있기 때문에 실질채권을 이용하면 기대인플레이션(expected inflation)의 정보를 포착할 수 있게 된다. 실제 금융산업에서는 기대인플레이션을 실질채권의 수익률과 이에 대응되는 명목채권의 수익률 간의 차이인 BEI(Break-Even Inflation)로 기대인플레이션을 추정하곤 한다. 그러나 Alonso, Blanco, and Rio (2001)에 따르면 BEI는 기대인플레이션의 불편추정량이 되지 못할 뿐만 아니라, Christensen, Dion, and Reid (2004)가 지적하듯 이러한 간편한 방식으로 도출된 기대인플레이션은 구조적으로 어떠한 요인에 의해 기대인플레이션이 형성되었는지 알 수 없으며, 미래의 기대인플레이션이 어떻게 될 지를 예측하는 데에는 한계가 있다. 또한 기술적으로는 Deacon and Derry (1994)가 지적하듯 인플레이션의 기간별 구조 전체를 구성해 낼 수 없다는 한계 역시 존재한다.

이 논문에서는, 이자율기간구조 모형 중 균형모형인 다요인(multi-factor) Vasicek (1977) 모형에 기반하여 물가연동부채권의 균형가격을 평가하고 나아가 채권에 내재되어 있는 명목이자율과 실질이자율 그리고 기대인플레이션을 찾아내는데 중점을 둔다. 다요인 모형은 내재된 이자율들이 어떠한 요인에 의해서 결정되는지를 밝혀주는 구조적인 접근이며, 미래의 예측도 가능하다는

1) 물가연동부채권의 역사는 Shiller (2003) 를 참조하라.

장점을 지니고 있다.

물론 미국의 TIPS를 이용한 Chen, Liu, and Cheng (2005), Ang and Bekaert (2003), Goto and Torous (2003), Shen and Corning (2001), Risa(2001), Sack (2000), Wilcox (1998) Gong and Remolona (1996) 등과 같은 기존 연구들과 영국의 Glits를 이용한 Chu, Pittman, and Chen (2006), Seppala (2004), Woodward (1990), Barr and Campbell (1995), Evans (1998 and 2003) Brown and Schaefer (1994), 이스라엘 채권을 이용한 Kandel, Ofer, and Sarig (1996), 캐나다의 RRB 를 이용한 Spiro (2003), Côté et al. (1996), 프랑스의 OATi를 이용한 Alonso, Blanco, and Rio (2001) 등과 같은 기존 연구들에서도 상품에 내재된 이자율과 기대인플레이션을 찾아내는 노력을 하고 있지만, 대부분의 연구들이 물가연동부채권의 구조를 정확히 반영하지 못한 채 채권가격을 평가하고 있다는 맹점을 지니고 있다.

물가연동부채권의 복잡한 구조는 인플레이션 연동지수가 거시경제변수의 특징인 시차의 문제가 존재하기 때문에 발생한다. 인플레이션 연동지수의 시차문제는 동채권이 완벽한 인플레이션 리스크 헷징 기능을 제공하지 못하는 상품으로 만든다. 따라서 이러한 채권구조의 특징이 반영되지 않는 모형을 통해 찾아낸 이자율과 기대인플레이션율은 제한적 의미를 지닐 수밖에 없다. 본 연구모형은 물가연동부채권의 복잡한 구조를 정확히 반영하여 균형가격을 평가하려고 한 점에서 모형자체의 기본적인 의의가 존재한다.

이에 일본의 JGBi (Inflation-Linked Japanese Government Bond)를 이용하여 모형의 안정성을 검증하고 채권에 내재된 실질이자율과 기대인플레이션율을 찾고 그 관계를 규명하고자 한다.

논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 물가연동부채권을 정의하고, 채권이 가지고 있는 현금흐름의 구조와 특징을 자세히 설명한다. 채권의 특징을 정확히 반영하는 것이 매우 중요한 작업이기 때문이다. 이후 제 3장에서는 물가연동부채권의 특징이 정확히 반영된 가격결정모형을 설계한다. 이를 기반으로 제 4장에서는 모형의 안정성을 검증하기 위해서 일본의 JGBi 자료를 이용하여 실증분석을 한다. 모형을 통해 발견된 이자율과 기대인플레이션율이 상호 어떠한 관계가 있으며, 이들을 구조적으로 설명하는 요인(factor)들은 어떠한 경제적 의미가 있는지를 설명한다. 그리고 기대인플레이션에 관한 가설인 피셔가설(Fisher Hypothesis)을 실제 채권에 내재된 기대인플레이션율을 통해서 검정해본다.

## 제 2장. 물가연동부채권의 구조와 특징

물가연동부채권이란 채권의 원금 및 이자지급액을 인플레이션에 연동시켜 채권투자에 따른 인플레이션 변동위험을 제거함으로써, 채권의 실질구매력(purchasing power)를 보장하는 채권을 말한다.

물가연동부채권은 부르는 명칭이 Inflation-Linked bond, Inflation-indexed bond, Real Yield Securities, Linker 등 다양하고, 국가별로도 다양한 명칭을 사용하고 있는데, 미국은 TIPS(Treasury Inflation Protected Securities), 영국은 ILGs(Inflation Linked Gilts), 캐나다는 RRBs(Real Return Bonds), 호주 및 뉴질랜드는 TIBs(Treasury Indexed Bonds) 등의 명칭을 사용하고 있으며, 1945년 핀란드를 시작으로 30여개국이 현재 발행하고 있다.

과거 발행사례를 보면 이스라엘, 칠레, 브라질, 아르헨티나 등 초인플레이션을 경험한 국가들이 재정자금을 원활히 조달하기 위한 수단으로 발행한 경우와 영국, 호주, 캐나다, 스웨덴, 미국, 프랑스, 일본 등 자본시장의 발전을 위해 발행한 경우로 크게 분류할 수 있다.

<표 1> 주요국의 물가연동부채권의 발행현황<sup>2)</sup>

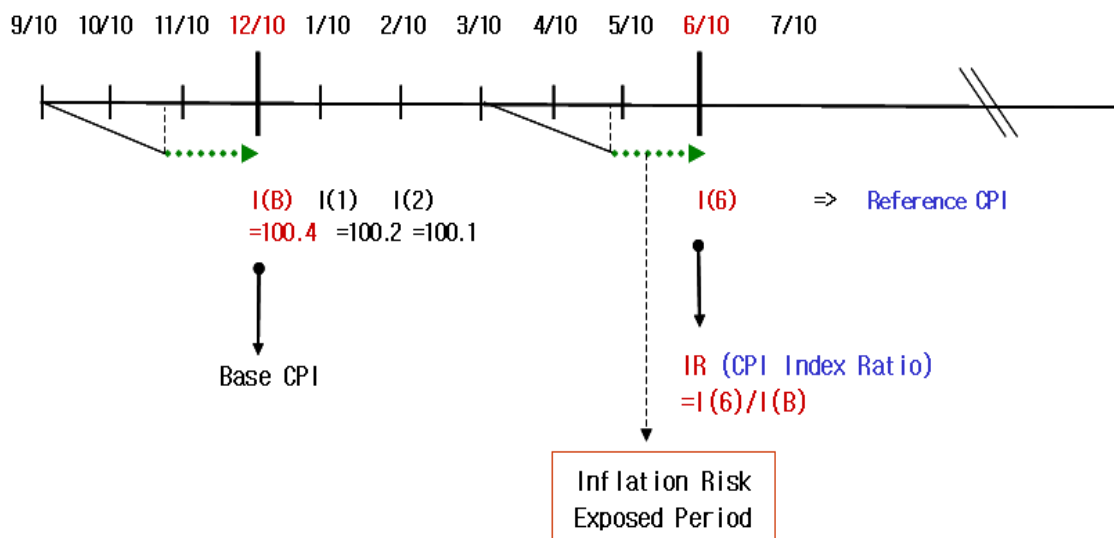
구분	미국	영국	프랑스	이태리	스웨덴	캐나다	일본
종목명	TIPS	Gilts	OATi	BTPi	Swedish Government Index-Linked	RRB	JGBi
잔액 (\$/bn)	351.493	206.933	124.685	61.148	32.149	30.430	21.729
도입시기	97. 1월	81. 3월	98. 9월	03. 9월	94. 4월	91. 12월	04. 3월
연동지수	CPI urban	UK RPI	CPIx tobacco	EURO HICPIx tobacco	CPI	CPI	CPIx perishables
연동시차 (Index lag)	3개월	8개월	3개월	3개월	3개월	3개월	3개월
원금보장	○	×	○	○	○, ×	×	×
이자주기	6개월	6개월	1년	6개월	1년, 만기시	6개월	6개월

물가연동부채권의 실제 구조는 세계적인 표준적인 방식이 존재하지만 각 국가마다 당면한 경제적인 이유들로 각기 독특한 구조를 가지고 있다. 일반적으로 5년-30년 정도의 장기채권들로 발행되며 6개월(semi-annual)을 단위로 쿠폰이 지급된다. 인플레이션을 연동시킬 연동기준 물가지수로 대부분의 국가에서 소비자물가지수(CPI)를 사용하고 있는데 미국의 TIPS의 경우 도시소비자물가지수(CPI-U)를, 영국 ILGs의 경우는 소매물가지수(RPI), 일본의 경우는 부패성있는 재화를 제외한 소비자물가지수를 사용하고 있다. 소비자물가지수는 발표가 월별로 발표되고 1달 정도의 시차가 존재하기 때문에 해당 월에 소비자물가지수가 늦게 발표된다는 특징이 있다. 따라서 대부분 국가에서는 3개월전 물가지수를 사용하고 있으며, 영국의 경우만 8개월전 지수를 사용하고 있다. 또한 물가연동부채권은 디플레이션 시에는 원금과 이자가 감소하여 투자자에게 명목적으로 손해가 가는 경우가 발생하게 되는데, 이에 따라 미국 및 프랑스 등은 디플레이션(deflation)에 따른 원금손실 가능성으로부터 투자자를 보호하기 위해서 원금보장의 구조를 채택하고 있는 반면 영국 및 캐나다 일본 등은 원금보장을 하지 않고 있는 특징이 있다.

2) 2005년말 기준이며, 자료의 출처는 국제결제은행(Bank of International Settlements) 과 블룸버그(Bloomberg)이다. CPI는 계절성이 조정되지않은 지수이다.

이렇듯 인플레이션을 고려한 실질수익률 내지 실질구매력을 유지시켜주는 물가연동부채권은 인플레이션 리스크를 제거해주는 중요한 상품수단으로 인식된다. 그런데 인플레이션을 연동시킬 가격지수가 시차를 두고 공표가 되기 때문에 인플레이션 연동이 완벽하게 이루어지지 않아 완벽한 인플레이션 리스크를 방어할 수단이 되지 못한다는 특징이 존재한다. 즉 대부분의 국가들이 3개월 시차를 두고 인플레이션을 연동시키는데, 그 이유는 기본적으로 여타 거시경제 지표들과 같이 인플레이션도 공표되는 시점이 시차를 두고 있기 때문이다.

[그림 1] 물가연동부채권 현금흐름의 정확한 구조



[그림 1]의 예를 통해 자세히 설명하면, 만약 물가연동부채권이 12월 10일에 발행되었다면 최초 쿠폰지급일은 6월 10일이 될 것이다. 최초 지급되는 쿠폰액은 가격지수의 비율, 즉 기준 CPI 대비 6월 10일의 CPI의 비율로 액면가에서 조정될 것이다. 그런데 6월 10일의 가격지수는 3개월 전인 3월 10일의 가격지수를 이용하게 된다. 또한 3월 10일 가격지수는 한달 후인 4월말에 공표가 된다. 즉 6월 10일 가격지수는 4월말에 확정적으로 알 수가 있게 되는 것이다. 이 경우 4월 말부터 6월 10일 사이에 이 채권을 보유하고 있는 투자자는 1달 10일이라는 기간동안 변화하게 되는 인플레이션을 조정하지 못하고 확정되어있는 가격지수의 비율로 쿠폰지급액을 받게 되는 것이다. 쿠폰지급일로부터 이전인 1달 10일이라는 기간동안 이 채권의 투자자는 인플레이션 리스크에 노출되게 된다. 따라서 엄밀하게 얘기하면 인플레이션 연동채권은 연동지수의 시차 때문에 완벽한 인플레이션 방어수단이 되지 않는 것이다.

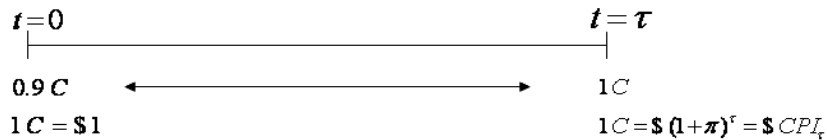
## 제 3장. 가격결정모형(The Pricing Model)

### 제 1절. 가격결정함수(pricing kernel)

#### 1.1. 실질채권의 가격결정함수

물가연동부채권의 가격결정모형을 구축하기 위해서 우선 물가연동부채권의 가격을 결정지어주는 가격결정함수(pricing kernel)이 어떠한 형태인가를 찾아내어야 한다.

물가연동부채권의 가격결정함수의 형태를 찾기 위해 현재 0.9 소비물음의 가격이며 만기에 1 소비물음(C)을 보장해주는 실질채권(real bond)을 고려해보자.



이 채권의 가격을 결정지어주는 가격결정함수는 실질단위에서는 다음의 식이 만족되어야한다.

$$0.9 = E^{Q_r} \left[ \exp\left(-\int_0^\tau r(s)ds\right) \right] \quad (1)$$

그러나 현실적으로 실질채권은 실물단위로 거래가 되는 것이 아니라 명목적인 화폐단위로 다시 전환되어 현금흐름이 주어지기 때문에 명목단위로 거래되는 것을 역으로 실질단위로 전환시켜야 한다. 실질채권의 명목단위 하에서 가격결정함수는 다음의 식이 만족되어야한다.

$$\begin{aligned}
 CPI_0 \times 0.9 &= \frac{E[CPI_\tau]}{(1+y)^\tau} & (2) \\
 0.9 &= E^P \left[ M(\tau) \times \frac{CPI_\tau}{CPI_0} \right] \\
 &= E^{Q_i} \left[ \exp\left(-\int_0^\tau (i(s) - \pi(s))ds\right) \right]
 \end{aligned}$$

동일한 채권의 가격은 일물일가의 법칙에 의해 동일한 가격이 되어야 하므로 식 (1)과 (2)는 같아야 한다.

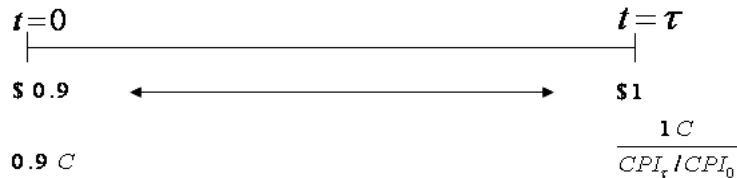
$$E^{Q_r} [\exp(-\int_0^\tau r(s)ds)] = E^{Q_i} [\exp(-\int_0^\tau (i(s)-\pi(s))ds)] \quad (3)$$

식 (3)에 의해 결국 서로 다른 동치마팅계일측도(EMM) 간의  $Q_r = Q_i$  이 만족되어야하고,  $r(s) = i(s) - \pi(s)$  이 만족되어야한다. 즉 실질채권의 가격결정식의 측도는 명목채권의 가격결정측도와 동일하고, 일반적으로 피셔방정식이라고 불리우는 실질이자율은 명목이자율과 기대인플레이션의 차와 같아야한다 결과를 얻는다.

### 1.2. 명목채권의 가격결정함수

실질채권이 실물단위로 일정한 구매력을 유지시켜주는 채권이나 채권의 현금흐름이나 거래는 모두 명목단위로 환산되어 나타나기 때문에 가격결정함수도 명목단위의 가격결정함수를 이용하여 역으로 실물단위의 가격결정함수의 형태를 도출해내야 한다. 그런데 위 식 (3)에 의해서 위험중립할인률(risk neutral discount factor)이 실물단위의 측도와 명목단위의 측도가 동일하다고 밝혀졌기 때문에 명목 위험중립할인률을 통해서 실질 위험중립할인률을 찾아내면 된다.

명목채권의 가격결정함수를 찾기 위해 현재 가격이 0.9\$이고 만기에 1\$를 주는 명목채권 (nominal bond)을 고려해보자.



이 채권의 가격을 결정지어주는 가격결정함수는 다음의 식이 만족되어야한다.

$$\begin{aligned} 0.9 &= E^{Q_i} [\exp(-\int_0^\tau i(s)ds)] \\ &= E^P[M(\tau)] \end{aligned} \quad (4)$$

실질단위에서의 가격결정함수는 다음과 같은 식이 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} 0.9 &= E^{Q_r} [\exp(-\int_0^\tau r(s)ds) \times \frac{1}{CPI_\tau / CPI_0}] \\ &= E^{Q_r} [\exp(-\int_0^\tau r(s)ds) \times \exp(-\int_0^\tau \pi(s)ds)] \\ &= E^{Q_r} [\exp(-\int_0^\tau i(s)ds)] \end{aligned} \quad (5)$$

실질채권에서와 동일한 논리로 식 (4)와 (5)는 동일하여야 하므로 실질단위에서의 가격결정식이 명목단위의 가격결정식과 동일하다는 결론을 얻는다. 이러한 결론은 실질채권의 가치를 평가하기 위해서는 명목채권의 가격결정식인 위험중립할인률을 이용하여 명목채권의 가격을 설명해주는 순간명목이자율(instantaneous nominal interest rate)을 찾아내어 실질채권의 가격결정식에 이용하면 된다는 함의를 제공해준다.

## 제 2절. 물가연동부채권의 가격결정 구조

### 2.1. 다요인(multi-factor) Vasicek 모형

앞 절에서 찾아낸 가격결정함수를 이용하여 물가연동부채권의 균형가격을 찾아낼 수 있다.

$$P(\tau) = \sum CF \times E^Q \left[ \exp\left(-\int_0^\tau i(s) ds\right) \right]$$

균형가격을 찾기 위해서는 가격결정함수 즉, 추계할인요인(stochastic discount factor)에 인자로 들어가 있는 순간이자율의 프로세스를 정의하여야 한다. 순간이자율의 정의에 따라 다양한 이자율의 기간구조모형이 존재한다.

대표적인 이자율 기간구조 모형인 Vasicek(1977) 모형은 이자율이 Ornstein-Uhlenbeck 프로세스를 따른다고 가정한다.

$$dr = -k(\theta - r) dt + \sigma dz$$

이 모형의 확장모형으로 다요인(multi-factor) Vasicek 모형은 이자율이 또 다른 요인들로 구성 된다는 모형이다. 만약 이자율이 이요인(two factor)으로 결정된다면 아래와 같은 이자율 프로세스가 정의된다.<sup>3)</sup>

$$i = \delta_i + \beta_x x + \beta_y y$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } dx &= -k_x(\theta_x - x) dt + \sigma_x dz_x \\ dy &= -k_y(\theta_y - y) dt + \sigma_y dz_y \end{aligned}$$

3) 이요인(two-factors)으로 정의한 이유는 모형의 검증을 위해서 사용한 일본 국채인 JGB의 요인이 두 개로 나타났기 때문이다.



여기서  $k_x$  는  $x$  요인의 평균회귀성향모수(mean-reversion speed parameter),  $\theta_x$  는 장기평균,  $\sigma_x$  는 표준편차를 의미한다. Ornstein-Uhlenbeck 프로세스는 정규분포를 따르는 것으로 알려져 있다.

## 2.2. 명목채권가격결정 모형

이요인(two factor) Vasicek 모형으로 명목채권의 가치평가를 하면 아래와 같다.

$$P_n(\tau) = \sum CF \times e^{-\delta_i \tau} \times E^Q \left[ \exp\left(-\int_0^\tau \beta_x x(s) ds\right) \right] \times E^Q \left[ \exp\left(-\int_0^\tau \beta_y y(s) ds\right) \right]$$

Vasicek 모형의 채권가격을 계산하는 방법은 직접대입(Brute-Force)하는 방법과 편미분방정식(PDE) 접근법이 있다. Vasicek 모형은 직접대입 방법으로도 계산가능하지만 대부분의 모델은 직접대입 방법은 채권의 가격을 평가하는데 한계가 있다. 따라서 PDE를 많이 이용하게 되는데,  $x$  요인의 가격결정함수가 만족되어야 하는 PDE는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} \sigma_x^2 P_{xx} - k_x (\theta_x - x) P_x - P_\tau = \beta_x x P \quad (6)$$

PDE의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$E^Q \left[ \exp\left(-\int_0^\tau \beta_x x(s) ds\right) \right] = A_x(\tau) \exp(-B_x(\tau)x)$$

$A_x(\tau)$ ,  $B_x(\tau)$  를 구하면 다음과 같다.<sup>4)</sup>

$$A_x(\tau) = \exp\left[\frac{\sigma_x^2 \beta_x^2}{4k_x^3} (2\tau k_x + 4e^{-k_x \tau} - e^{-2k_x \tau} - 3) - \frac{\theta_x \beta_x}{k_x} (\tau + e^{-k_x \tau} - 1)\right]$$

$$B_x(\tau) = \frac{\beta_x}{k_x} (1 - e^{-k_x \tau})$$

이렇게 구해진  $A_x(\tau)$ ,  $B_x(\tau)$  를 가격식에 대입하면 모수들과 요인들의 함수형태인 가격식이 완성된다.

4) 해를 구하는 과정은 Vasicek (1977)을 참조하라.

### 2.3. 물가연동부채권 가격결정 모형

다요인(multi-factor) Vasicek 모형으로 물가연동부채권의 가격을 평가하기 위해서는 이자율의 요인을 아래와 같이 가정하자.

$$r = \delta_r + \alpha y_1$$

앞에서 명목이자율을 이요인(two-factors)으로 가정했기 때문에 순간실질이자율이 하나의 요인에 의해 결정된다고 봄이 타당하다. 왜냐하면 피셔가설에 의하면 실질이자율은 명목이자율에서 기대인플레이션을 차감한 것과 같아야 하고 실질이자율과 기대인플레이션간의 상관관계가 없어야 하기 때문에 실질이자율의 요인은 명목이자율의 요인의 개수보다 작아야 하며 요인은 명목이자율의 요인들과 공유되어야 한다. 또한 실질이자율만의 추가적인 요인이 존재하면 안 된다. 따라서 요인 로딩(loading)을 통해서 명목이자율과의 공통요인들과 실질이자율의 한요인(one-factor)을 다시 표현가능하다.

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_x x + \phi_y y \\ \Rightarrow r &= \delta_r + \delta_x x + \delta_y y \end{aligned}$$

여기서,  $\delta_x = \alpha\phi_x$ ,  $\delta_y = \alpha\phi_y$  이다. 그런데 현실적으로 피셔가설이 성립된다는 보장이 없으므로 만약 실질채권만의 요인이 존재한다면 또 다른 하나의 요인을 추가적으로 도입할 수 있게 된다. 단, 요인들간의 상관관계는 0 이어야 된다는 조건은 만족되어야 한다.<sup>5)</sup>

$$r = \delta_r + \delta_x x + \delta_y y + \delta_w w$$

$$\begin{aligned} \text{where, } dx &= -k_x(\theta_x - x) dt + \sigma_x dz_x \\ dy &= -k_y(\theta_y - y) dt + \sigma_y dz_y \\ dw &= -k_w(\theta_w - w) dt + \sigma_w dz_w \end{aligned}$$

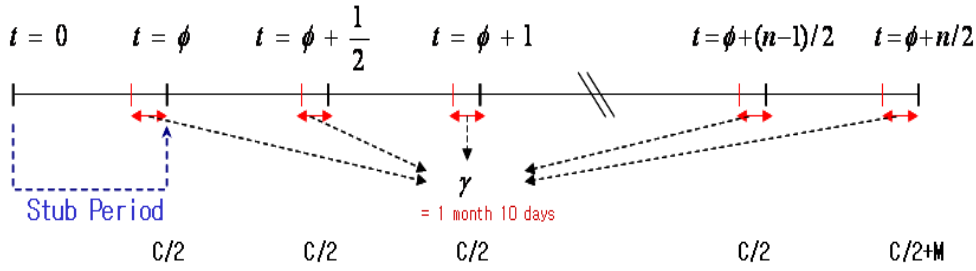
$$s.t. \ x \perp y \perp w$$

결론적으로 실질채권은 이요인(two-factors)으로 결정된다. 하나의 요인은 명목채권과의 공통요인이며 또 하나의 요인은 실질채권만의 요인이다.

물가연동부채권의 가격을 평가하기 위해서는 채권이 가지고 있는 현금흐름의 구조를 정확히 반영하여야 한다. 왜냐하면 가격지표의 시차에 의한 인플레이션 리스크가 헷징되지 않는 기간이 존재하기 때문에 그 기간의 가격은 다르게 결정되어야 하기 때문이다.

5) 요인들간의 상관관계를 0 으로 상정한 것은 추정 방법을 주성분분석(PCA)을 사용하였기 때문이다.

[그림 2] 물가연동부채권 현금흐름과 가격결정구조



[그림 2]에서 보듯이 채권투자자가 첫 쿠폰지급일로부터 이전 1달 10일( $\gamma$ ) 기간의 인플레이션 리스크에 노출되는 기간이 존재하게 된다.

즉, 첫쿠폰의 현재가치는 첫쿠폰지급일로부터 1달 10일 이내에 채권투자를 할 때와 1달 10일보다 떨어져 있을 때 투자를 할 때는 각각 다르다. 1달 10일 이내에 있을 경우에는 인플레이션 지수가 이미 알려져 있어서 첫쿠폰지급일까지의 인플레이션의 변화가 반영되지 않는다. 1달 10일 이내가 아닐 경우에는 인플레이션 지수가 확률적으로 결정되기 때문에 첫쿠폰지급일까지의 인플레이션 변화가 첫쿠폰에 반영되게 된다. 이러한 현금흐름의 성격을 반영하여 쿠폰금액들의 현재 가치를 구해보면 다음과 같다.

우선 거래일이 첫쿠폰지급일( $\phi$ )로부터 1달 10일( $\gamma$ ) 이내에 있는 경우, 첫쿠폰의 현재가치는 다음과 같다.

$$PV(\phi) = E^Q \left[ P_n(\phi) \times \frac{c}{2} \times \frac{I_{\phi-\gamma}}{I_B} \right]$$

여기서  $P_n(\phi)$  는  $\phi$  만기의 명목 순할인채권의 가격을,  $c$ 는 쿠폰율을,  $I_B$  는 기준년도의 인플레이션 연동지수를 의미한다.  $c$  와  $I_B$  ,  $I_{\phi-\gamma}$  는 거래일 당시 이미 알려져 있는 비확률적인 변수들이기 때문에 현재가치의 계산에서 상수항으로 처리되고 있다. 확률적인 변수인 명목 순할인채권의 가격  $P_n(\phi)$  은 동치마팅계일(EMM) 측도하의 가격결정식인 추계적할인인자(SDF)를 이용하여 다음과 같이 다시 표현된다.

$$E^Q \left[ \exp\left(-\int_0^{\phi} i(s) ds\right) \right] \times \frac{c}{2} \times \frac{I_{\phi-\gamma}}{I_B}$$

$E^Q \left[ \exp\left(-\int_0^{\phi} i(s) ds\right) \right]$  는 명목채권의 가격결정모형에서 구한 각 요인  $x$ ,  $y$  각각에 대한  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$  를 이용하여 다음과 같이 정리된다. 즉 첫쿠폰의 현재가치는 모수와 요인들의 함수 형태의 가격식이 된다.

$$\frac{c}{2} \times \frac{I_{\phi-\gamma}}{I_B} \times A_x(\phi) \exp(-B_x(\phi)x) \times A_y(\phi) \exp(-B_y(\phi)y)$$

다음으로, 거래일이 첫쿠폰지급일( $\phi$ )로부터 1달 10일( $\gamma$ ) 이전에 있는 경우, 첫쿠폰의 현재가치는 다음과 같다.

$$PV(\phi) = E^Q[\exp(-\int_0^{\phi-\gamma} i(s)ds) \times P_n(\phi-\gamma, \gamma) \times \frac{c}{2} \times \frac{I_{\phi-\gamma}}{I_B}]$$

여기서  $P_n(\phi-\gamma, \gamma)$  는  $\phi-\gamma$  기에  $\gamma$  만기의 명목 순할인채권의 가격을 의미한다. 또한 위와 동일하게  $c$ 는 쿠폰율을,  $I_B$  는 기준년도의 인플레이션 연동지수를 의미한다.

거래시점이 쿠폰지급일로부터  $\gamma$  기간 이전이기 때문에 거래시점부터  $\gamma$  기간 이전에 해당하는 기간과 인플레이션 리스크에 노출되는  $\gamma$  기간으로 분리하게 된다. 왜냐하면 거래시점에서 각 기간에 해당하는 확률적인 항목이 다르기 때문이다. 즉 인플레이션 연동지수의 비율인  $\frac{I_{\phi-\gamma}}{I_B}$  는

$\frac{I_0}{I_B} \times \frac{I_{\phi-\gamma}}{I_0}$  으로 분리되는데 앞 항의  $\frac{I_0}{I_B}$  는 거래시점에 이미 알려져있는 비확률적인 항이고 뒷 항의  $\frac{I_{\phi-\gamma}}{I_0}$  는 확률적인(stochastic) 항이 된다. 따라서 첫쿠폰의 현재가치식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2} \times \frac{I_0}{I_B} \times E^Q[\exp(-\int_0^{\phi-\gamma} i(s)ds) \times P_n(\phi-\gamma, \gamma) \times \frac{I_{\phi-\gamma}}{I_0}] \\ &= \frac{c}{2} \times \frac{I_0}{I_B} \times E^Q[\exp(-\int_0^{\phi-\gamma} r(s)ds) \times \exp(-\int_{\phi-\gamma}^{\gamma} i(s)ds)] \end{aligned} \quad (7)$$

이 식의 해는 괄호안의 기대치를 계산하면 구할 수 있는데 식 (8)을 통해서 얻게 되는 두 번째 쿠폰부터의 현재가치의 해와 적분의 구간만 다른 동일한 형태의 해를 얻게 된다.

위의 식이 가진 의미를 해석해보기 위해서 재정리하면 다음과 같다.

$$\frac{c}{2} \times \frac{I_0}{I_B} \times E^Q[\exp(-\int_0^{\gamma} r(s)ds) \times \exp(-\int_{\phi-\gamma}^{\gamma} \pi(s)ds)]$$

여기서  $E^Q[\exp(-\int_{\phi-\gamma}^{\gamma} \pi(s)ds)]$  는 인플레이션 리스크에 노출되는  $\gamma$  기간 때문에 할인되는 부분이다.

마지막으로, 두 번째 쿠폰부터 발생하는 현금흐름들의 현재가치는 위와 동일한 원리로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & PV(\phi + \frac{1}{2}j) \\
 &= \frac{c}{2} \times \frac{I_0}{I_B} \times E^Q \left[ \exp\left(-\int_0^{\phi + \frac{j}{2} - \gamma} r(s) ds\right) \times \exp\left(-\int_{\phi + \frac{j}{2} - \gamma}^{\phi + \frac{j}{2}} i(s) ds\right) \right]
 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서  $j$ 는 두 번째 쿠폰부터 마지막 쿠폰지급까지 쿠폰지급횟수이다. 식 (7)과 식 (8)의 괄호안의 기대치를 풀어내면 각각의 가격식을 구해낼 수 있다. 식 (7)과 식 (8)은 적분의 구간만 다를 뿐 동일한 식을 연산하는 것이므로 식 (8)의 연산만을 보면 다음과 같다.

식 (8)의 괄호안의 기대치에서 순간실질이자율과 명목이자율의 정의에 따라 대입해보면

$$E^Q \left[ \exp\left(-\int_0^{\phi + \frac{j}{2} - \gamma} (\delta_r + \delta_x x + \delta_y y + \delta_w w) ds\right) \times \exp\left(-\int_{\phi + \frac{j}{2} - \gamma}^{\phi + \frac{j}{2}} (\delta_i + \beta_x x + \beta_y y) ds\right) \right]$$

위와 같은 식을 얻을 수 있고, 각 요인들이 서로 직교(orthogonal)하므로 식을 재정렬하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & E^Q \left[ \left[ \exp\left(-\int_0^{\phi + \frac{j}{2} - \gamma} \delta_x x(s) ds\right) - \int_{\phi + \frac{j}{2} - \gamma}^{\phi + \frac{j}{2}} \beta_x x(s) ds \right] \times \left[ \exp\left(-\int_0^{\phi + \frac{j}{2} - \gamma} \delta_y y(s) ds\right) - \int_{\phi + \frac{j}{2} - \gamma}^{\phi + \frac{j}{2}} \beta_y y(s) ds \right] \right. \\
 & \left. \times \exp\left(-\int_0^{\phi + \frac{j}{2} - \gamma} \delta_w w(s) ds\right) \right] \times \exp\left(-\delta_r \left(\phi + \frac{j}{2} - \gamma\right) - \delta_i \gamma\right)
 \end{aligned}$$

위 식의 기대치를 풀어내면 식 (8)의 가격식을 모수와 요인들의 함수식으로 다음과 같이 얻어낼 수 있다.<sup>6)</sup>

6) 증명은 김상수의 박사학위논문(2008)의 부록을 참조하라.

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{2} \times \frac{I_0}{I_B} \times \exp \left[ \left[ -\frac{\delta_x x_0 (1 - e^{-k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)})}{k_x} - \frac{\beta_x x_0 (e^{-k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} - e^{-k_x(\phi + \frac{j}{2})})}{k_x} \right] \right. \\
& + \frac{1}{2} \times \delta_x^2 \frac{\sigma_x^2}{k_x^2} \left[ \frac{-3 - e^{-2k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} + 4e^{-k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} + 2k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)}{2k_x} \right] \\
& + \frac{1}{2} \times \beta_x^2 \frac{\sigma_x^2}{2k_x^2} \left[ e^{-2k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} - e^{-2k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} + 2k_x(\gamma) + 4(e^{-k_x(\phi + \frac{j}{2})} - e^{-k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)}) \cosh(k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)) \right] \\
& \left. + \frac{1}{2} \times 2\delta_x \beta_x \frac{\sigma_x^2}{2k_x^3} \left[ e^{-k_x(2(\phi + \frac{j}{2} - \gamma) + (\phi + \frac{j}{2}))} [e^{k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} - 1]^2 (e^{k_x(\phi + \frac{j}{2})} - e^{k_x(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)}) \right] \right] \\
& \times \exp \left[ \left[ -\frac{\delta_y y_0 (1 - e^{-k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)})}{k_y} - \frac{\beta_y y_0 (e^{-k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} - e^{-k_y(\phi + \frac{j}{2})})}{k_y} \right] \right. \\
& + \frac{1}{2} \times \delta_y^2 \frac{\sigma_y^2}{k_y^2} \left[ \frac{-3 - e^{-2k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} + 4e^{-k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} + 2k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)}{2k_y} \right] \\
& + \frac{1}{2} \times \beta_y^2 \frac{\sigma_y^2}{2k_y^2} \left[ e^{-2k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} - e^{-2k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} + 2k_y(\gamma) + 4(e^{-k_y(\phi + \frac{j}{2})} - e^{-k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)}) \cosh(k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)) \right] \\
& \left. + \frac{1}{2} \times 2\delta_y \beta_y \frac{\sigma_y^2}{2k_y^3} \left[ e^{-k_y(2(\phi + \frac{j}{2} - \gamma) + (\phi + \frac{j}{2}))} [e^{k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} - 1]^2 (e^{k_y(\phi + \frac{j}{2})} - e^{k_y(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)}) \right] \right] \\
& \times \exp \left[ \left[ -\frac{\delta_w w_0 (1 - e^{-k_w(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)})}{k_w} \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \times \delta_w^2 \frac{\sigma_w^2}{k_w^2} \left[ \frac{-3 - e^{-2k_w(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} + 4e^{-k_w(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)} + 2k_w(\phi + \frac{j}{2} - \gamma)}{2k_w} \right] \right] \\
& \times \exp \left( -\delta_r(\phi + \frac{j}{2} - \gamma) - \delta_i \gamma \right)
\end{aligned}$$

## 제 4장. 실증분석(Empirical Analysis)

### 제 1절. 자료(data)

모형의 안정성을 검증하기 위해서 이 논문에서는 일본의 물가연동부채권인 JGBi (Inflation-Linked Japanese Government Bond)<sup>7)</sup>의 자료를 사용하였다. 표본의 기간은 2005년 9월 6일부터 2007년 7월 20일까지이며 자료의 형태는 일별(daily) 자료이다.

일본의 JGBi는 2004년 3월에 최초로 발행되었으며, 모든 채권의 만기가 10년으로 동일하다. 쿠폰지급은 반기(semi-annual)마다 고정금리로 지급된다. 쿠폰지급은 매 해당 월의 10일에 지급된다. 현재까지 발행된 채권은 12개의 채권<sup>8)</sup>이며 기발행된 채권의 현금흐름은 3월, 9월에 쿠폰이 지급되는 JGBi 1, JGBi 5, JGBi 7, JGBi 9, JGBi 11, 그리고 6월, 12월에 지급되는 JGBi 2, JGBi 3, JGBi 4, JGBi 6, JGBi 8, JGBi 10, JGBi 12 로 나누어진다. 연동지수로 사용되는 가격지수는 CPI 지수에서 부패성이 있는 재화(perishable goods)를 제외한 CPI 지수<sup>9)</sup>를 사용하고 있다. 지수의 기준년도는 2005년이며 계절조정은 하지 않은 지수가 사용된다.

모형의 검정을 위해서 JGBi 자료와 더불어 명목채권(nominal bonds)의 자료를 사용하게 되는데, 명목채권은 기본적으로 JGBi와 동일한 만기를 가진 12개의 채권을 사용하였다. 더불어 만기가 짧은 5개의 채권(call rate 포함)을 포함시켰다. 왜냐하면 JGBi가 모든 만기구조를 다 가지고 있지 못한 상황, 즉 만기가 짧은 채권이 존재하지 않기 때문에 발생할 수 있는 이자율기간구조(term structure)의 추정에 있어서 왜곡을 방지하기 위해서 짧은 만기의 명목채권을 도입하였다.

JGBi의 만기수익률(yield to maturity)의 평균은 약 1.08% 정도이며 분산은 0.11 정도 된다. 상대적으로 만기가 길어질수록 만기수익률이 크며, 분산은 만기가 짧을수록 크다. 명목채권인 JGB는 평균 1.44%의 평균 만기수익률을 보였으며 분산은 0.14로 나타났다. 또한 동일한 만기 하에서 명목채권의 수익률이 실질채권의 수익률보다 높게 나타났다. 이는 실질채권의 수요가 상대적으로 많아 가격이 높게 형성되었음을 보여준다.

물가연동부채권의 가격지수(price index)로 CPI 지표를 사용하는데, 동 채권의 지수로 사용하기 위한 CPI 지수는 부패가능한 재화를 뺀 CPI 지수를 사용하며 계절조정(seasonal adjustment)을 시키지 않은 지수를 사용한다. 일반적으로 계절성(seasonality)의 지표는 일본 통계청에서 공식 발표되고 있으므로 쉽게 자료를 획득할 수 있다. 계절성의 자료를 얻는데 비용이 거의 들지 않는다고 하면 투자자의 입장에서 채권의 가격을 예측할 때 계절성을 고려한다고 판단하여도 무관

7) 자료의 출처는 Bloomberg 이다.

8) JGBi1은 2004년 4월 14일, JGBi2는 2004년 6월 3일, JGBi3는 2004년 12월 7일, JGBi4는 2005년 6월 7일, JGBi5는 2005년 9월 6일, JGBi6은 2005년 12월 6일, JGBi7은 2006년 3월 7일, JGBi8은 2006년 6월 6일, JGBi9는 2006년 10월 5일, JGBi10은 2006년 12월 7일, JGBi11은 2007년 4월 5일, JGBi12는 2007년 6월 7일에 발행되었다.

9) 자료의 출처는 일본 재무성이다.

하다. 균형가격을 평가하는 본 모형에서는 가격지수의 계절성을 고려하여 계절성을 조정해주는 요인(factor)을 고려하였기 때문에 자료들에 나타난 계절성을 조정해주었다.

## 제 2절. 실증분석의 절차와 방법론(methodology)

모형을 검증할 자료들은 명목채권 16개와 물가연동부채권 12개이며 시계열상으로 443일이 존재하는 패널(panel) 형태로 주어졌다. 모형에서 추정되어야 할 파라미터들은 횡단면 자료로 추정되어야 할 요인(factor)들이 존재하고, 시계열적으로 추정되어야 할 모수(parameter)들이 존재한다. 따라서 1단계로 횡단면(cross-section)자료를 이용하여 모형의 요인(factor)를 추정하고, 2단계로 시계열(time-series)자료를 이용하여 모형의 모수(parameter)를 추정하는 2단계 접근법(two step approach)을 사용한다.

### 2.1. 횡단면 추정: 요인(factor) 추정

자료의 횡단면적으로 추정되어야 할 요인(factor)들을 추정할 방법론으로 주성분분석(PCA: Principal Component Analysis)을 사용하였다. 방법론은 다음과 같다.

$$yield = BF + \epsilon$$

$$\text{s.t. } E(F) = 0, \text{ cov}(F) = I, E(\epsilon) = 0, \text{ cov}(\epsilon) = \Phi$$

yield 는 채권들의 만기수익률을 나타내고, B 는 요인적재(factor loading)행렬, F 는 요인 벡터이다. 확률적 요인과 오차항은 위에 제시된 제약조건을 만족시켜야 한다.

우선 yield는 명목채권 9개와 물가연동부채권 5개의 만기수익률 각각으로 정의된다. 자료의 특성상 물가연동부채권의 발행이 채권마다 다르며 최근에 발행된 채권은 자료의 패널 구성상 과거의 시계열이 존재하지 않기 때문에 주성분분석(PCA)를 통해서 요인을 찾을 수가 없는 한계가 존재한다. 따라서 시계열상 모든 자료가 존재하는 발행시기가 빠른 채권들만을 모아 명목채권은 9개, 인플레이션 연동채권은 5개에서 요인을 찾아내었다.

만기수익률의 분산-공분산행렬에서 찾아진 특성근이  $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \dots > \Lambda_n$  이고 특성벡터가  $l_1 > l_2 > \dots > l_n$  이며 그 중 분산을 가장 잘 설명하는 것이 2개라면 요인적재행렬은  $B(\sqrt{\Lambda_1}l_1, \sqrt{\Lambda_2}l_2)$  이 되며 요인들은 다음과 같게 된다.

$$F = \left( \frac{l_1}{\sqrt{\Lambda_1}}, \frac{l_2}{\sqrt{\Lambda_2}} \right)' \times yield$$



명목채권 9개에 대한 PCA로 찾아진 요인들은 명목채권들의 선형결합을 의미하며, 물가연동부채권 5개로 찾아진 요인들은 동 채권들의 선형결합을 의미한다. 즉 채권들의 공통의 특성을 몇 개 요인들의 차원으로 축약시켜 주는 것이다.

## 2.2. 시계열 추정: 모수(parameter) 추정

횡단면 자료로 추정된 요인들을 이용하여 다음 단계로 각 채권의 시계열 자료들을 설명할 모형의 모수(parameter)를 추정해야한다. 모수를 추정하기 위해서 사용하는 방법론은 실제 자료와 모형의 자료간의 오차의 제곱을 최소화하는 최소제곱오차법(Squared Error Minimization)을 사용한다.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (P_{it}^T - P_{it}^M)^2$$

여기서  $P^T$  는 실제채권가격을,  $P^M$  은 모형상 채권가격을 나타내며,  $N$ 은 채권의 개수,  $T$ 는 시계열 개수를 나타낸다.

채권의 기본 자료가 가격자료로 주어졌고 모형도 가격에 대한 모형을 구성해놓았기 때문에 실제가격과 모형가격의 오차의 제곱을 최소화하면 된다. 그러나 일반적으로 채권가격 모형의 추정은 채권의 가격이 아니라 가격의 또다른 표현인 만기수익률(yield to maturity:  $y$ )을 이용하는 것이 보편적이므로 위의 최적화문제를 가격단위가 아닌 만기수익률 단위의 목표함수로 전환하면 다음과 같다.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{it}^T - y_{it}^M)^2$$

가격( $P$ )과 만기수익률( $y$ )의 관계는 일본 국채의 경우에 다음의 식을 이용하여 만기수익률을 계산한다.

$$P_c = \frac{cM}{y_c} \left[ \frac{(1+y_c/2)^{2\tau} - 1}{(1+y_c/2)^{2\tau}} \right] + \frac{M}{(1+y_c/2)^{2\tau}}$$

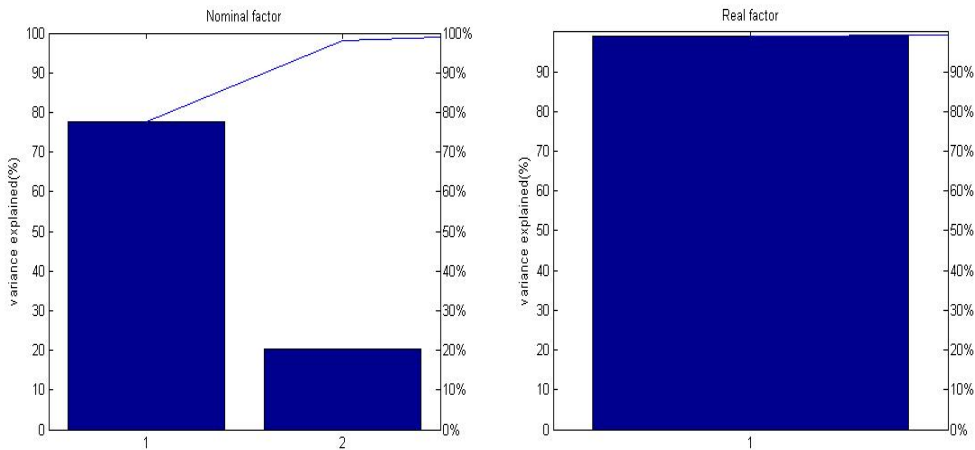
여기서  $c$ 는 쿠폰율(coupon rate)이고  $M$ 은 액면가,  $\tau$  는 만기이다. 그런데 만기수익률이 가격의 함수로 닫힌 해(closed form solution)가 존재하지 않기 때문에 수치해석의 방법인 Bisection Method 를 이용해서 모형의 가격을 만기수익률로 계산하여야 한다.

### 제 3절. 추정결과

#### 3.1. 요인(factor), 모수(parameter)

주성분분석(PCA)를 이용하여 명목채권과 물가연동부채권의 변동을 가장 잘 설명하는 특성근들의 설명력을 찾아본 결과, [그림 3]에서 보는 바와 같이, 명목채권을 설명하는 특성근 중 첫 두 특성근이 전체 변동의 98% 이상을 설명하고 있고 그중 첫 번째가 78%, 두 번째가 20%를 설명하고 있다. 물가연동부채권은 하나의 특성근이 99% 이상을 설명하고 있다.

[그림 3] JGB와 JGBi 주성분(principal component)들의 설명력



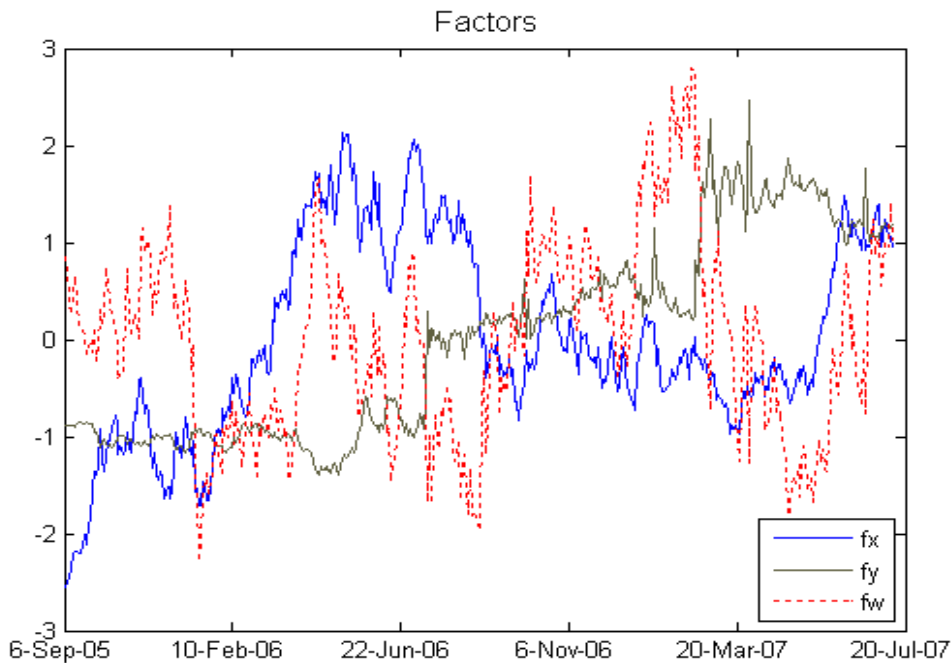
이렇게 명목에는 두 개의 특성근이, 실질에는 하나의 특성근이 실제 자료를 대부분 설명하고 있기 때문에 그에 따른 요인(factor)들도 명목에는 두 개의 요인을 물가연동부채권에는 하나의 요인을 정의하게 된다. 제 3장에서 가격결정모형을 명목채권은 이요인 모형(two factor model)을, 물가연동부채권은 하나의 요인(one factor model)을 설정한 것은 이러한 결과를 바탕으로 한 것이다.

그런데 명목채권과 물가연동부채권의 요인들은 서로 각각 다른 요인들이 아니라 명목채권의 요인들과 공통의 요인(common factor)들로 물가연동부채권의 요인들이 결정되어야 한다. 왜냐하면 피셔가설에 따르면 실질이자율은 명목이자율에서 기대인플레이션을 차감한 것일 뿐이므로 명목적인 요소에서 기대인플레이션에 관련된 요소를 제외한 부분이 실질적 요소를 구성하게 된다. 따라서 명목채권의 요인들이 물가연동부채권의 요인을 설명하는 공통의 요인이 될 것이다. 이를 규명하기 위해서 명목채권의 요인을  $x, y$ 라고 하고 인플레이션 연동채권의 요인을  $y_1$ 이라고 정의하면 이론적으로  $y_1$ 은  $x, y$ 에 의해서 전부 설명되어야 하기 때문에 아래와 같은 회귀분석(regression analysis)을 시행했다.

$$y_1 = \beta_1 x + \beta_2 y + \epsilon^{10}$$

자료가 시계열의 특성인 단위근(unit root)의 성격을 가질 가능성이 있으므로 각 변수를 차분화하여 차분변수를 사용하여 회귀분석을 하였다. 회귀분석의 결과, 모형의 설명력인 조정계수( $R^2$ )는 0.65로 나타나 공통요인으로 정의되는 명목채권의 요인들이 물가연동부채권의 전부를 설명하지 못하는 결과를 보여줬다. 이 결과는 물가연동부채권에는 공통요인으로 설명되지 않는 추가적인 고유한 요인이 존재함을 보여준다. 따라서 물가연동부채권 자체의 고유한 요인이 정의되게 되는데 그 요인은  $x, y$ 와는 직교성을 만족해야하며  $y_1$ 에서  $x, y$ 로 설명되지 않은 부분이기 때문에 위의 회귀분석에서 오차항을 추가적인 요인으로 설정하였다. 이렇게 찾아진 각 요인들의 시계열은 [그림 4]에서 보는 바와 같다.

[그림 4] 추정된 요인(factor)들의 시계열자료<sup>11)</sup>



주성분분석(PCA)으로 찾아진 요인들을 이용하여 실제 만기수익률을 가장 잘 설명하는 모수(parameter)들을 최소제곱오차법을 이용하여 찾아낸 결과는 <표 2>와 같다. 추정된 모수들은 표준오차의 값으로 확인되듯이 통계적으로 안정된 값을 보이고 있다. 각 요인의 장기평균( $\theta$ )은  $w$  요인,  $x$  요인,  $y$  요인 순으로 크게 나왔으며 평균회귀속도( $k$ )는  $x, w, y$  순으로 나타났다. 각 요인이 이자율에 영향을 미치는 민감도( $\beta$ )는  $x, w, y$  순으로 나타났다.

10) 각 변수는 차분변수,  $y_1 = y_1(t+1) - y_1(t)$ ,  $x = x(t+1) - x(t)$ ,  $y = y(t+1) - y(t)$  으로 정의되었고, 단위근검정(unit root test) 결과, Augmented Dickey-Fuller test 통계량이 각각 -22.73, -21.48, -26.19로 단위근이 없는 것으로 확인되며, 회귀분석결과는  $\beta_1 = 0.99$ ( $p$ 값 : 0.0),  $\beta_2 = -0.059$ ( $p$ 값 : 0.15),  $R^2 = 0.65$  로 나타났다.

11) 요인들은 모두 평균이 0, 분산이 1로 표준화되었다.

<표 2> 모수(parameter) 추정결과<sup>12)</sup>

모수	값	모수	값
$\delta_i$	-0.00008 (4.3613e-007)	$\sigma_y$	-0.03544 (0.0019)
$k_x$	0.13124 (1.5270e-006)	$k_w$	0.03551 (3.9281e-004)
$\theta_x$	12.3120 (3.0362e-004)	$\theta_w$	24.0418 (0.1400)
$\beta_x$	0.00256 (4.1949e-008)	$\delta_w$	0.00207 (1.3139e-005)
$\sigma_x$	0.06704 (0.0020)	$\sigma_w$	7.78031 (0.1049)
$k_y$	0.01111 (2.0490e-007)	$\delta_x$	0.00107 (6.7237e-006)
$\theta_y$	-3.34153 (8.2430e-005)	$\delta_y$	0.00158 (5.2705e-006)
$\beta_y$	0.00069 (1.2432e-008)	$\delta_r$	0.00009 (3.3046e-005)

모형을 통해서 추정된 각 채권의 만기수익률과 추정오차의 통계량은 <표 3>과 같다. 추정결과는 실제 자료의 통계량과 같으며, 추정오차의 경우 명목채권에 추가로 들어가 있는 단기채권 5개의 오차가 크기 때문에 명목채권오차가 실질채권오차보다 큰 특성을 지닌다.

<표 3> 추정된 채권들의 만기수익률의 통계량

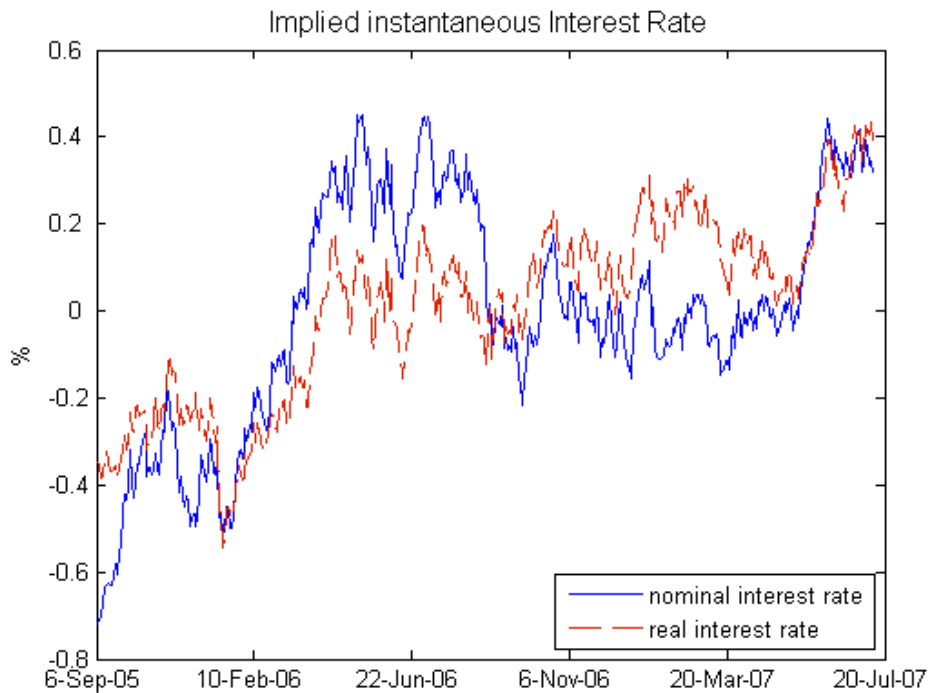
JGB	평균	표준편차	제곱오차 (%)	JGBi	평균	표준편차	제곱오차 (%)
Call rate	0.17	0.13	18.8446 (21.1)				
JGB 02	0.64	1.21	46.0484 (51.7)				
JGB 03	0.96	0.18	2.0119 (2.3)				
JGB 04	1.24	0.16	1.1099 (1.2)				
JGB 1	1.47	0.14	2.1484 (2.4)	JGBi 1	0.88	0.14	0.2749 (14.3)
JGB 2	1.49	0.15	2.2262 (2.5)	JGBi 2	0.94	0.14	0.2360 (12.3)
JGB 3	1.54	0.14	2.0323 (2.3)	JGBi 3	0.92	0.14	0.2293 (11.9)
JGB 4	1.59	0.14	1.6038 (1.8)	JGBi 4	1.01	0.14	0.1123 (5.8)
JGB 5	1.78	0.16	9.1659 (10.3)	JGBi 5	0.99	0.14	0.1112 (5.8)
JGB 6	1.67	0.12	1.1632 (1.3)	JGBi 6	1.01	0.14	0.2421 (12.6)
JGB 7	1.71	0.10	0.9231 (1.0)	JGBi 7	1.08	0.11	0.4117 (21.4)
JGB 8	1.71	0.10	0.6955 (0.8)	JGBi 8	1.15	0.09	0.0890 (4.6)
JGB 9	1.71	0.08	0.5067 (0.6)	JGBi 9	1.18	0.07	0.0739 (3.8)
JGB 10	1.74	0.10	0.4651 (0.5)	JGBi 10	1.19	0.07	0.1008 (5.2)
JGB 11	1.81	0.09	0.1632 (0.2)	JGBi 11	1.21	0.08	0.0233 (1.2)
JGB 12	1.93	0.02	0.0276 (0.03)	JGBi 12	1.34	0.05	0.0157 (0.8)
Total	1.45	0.13	89.14	Total	1.08	0.11	1.92

12) 괄호안의 값은 표준오차(standard error)로 실제 hessian과 gradient에 의해서 계산된 값이다.

### 3.2. 순간 명목이자율, 실질이자율, 기대인플레이션율

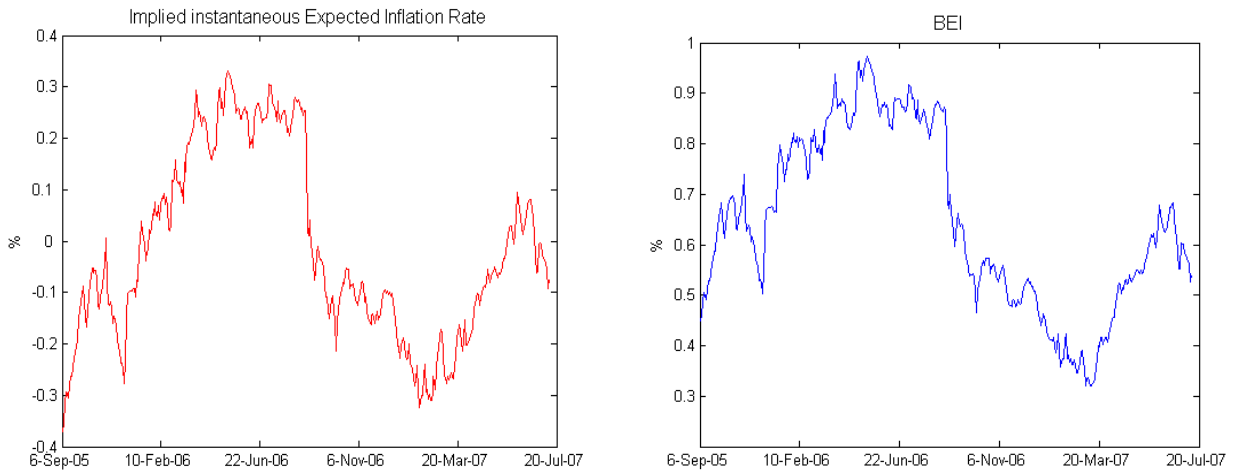
모형을 통해서 추정된 순간 명목이자율과 실질이자율, 그리고 기대인플레이션율은 아래 그림들과 같다. 이는 순간이자율(instantaneous interest rate)들이며 상품에 내재(implied)되어 있는 이자율들이다. 즉 명목채권과 실질채권에 내재되어 있는 이자율들을 균형모형을 통해서 찾아낸 것이다. 일반적으로 실질이자율과 기대인플레이션율은 시장에서 발견할 수 없는 변수들이기 때문에 기존의 연구들에서는 서베이를 하거나 다른 대리변수들을 통해서 추정해왔다. 이러한 점에서 현재까지 연구된 실질이자율과 기대인플레이션율에 관한 연구들은 항상 대표성에 관한 문제가 상존한다. 특히 경제학에서 매우 중요하게 다루어지는 피셔가설(fisher hypothesis)을 검증하기 위한 많은 연구들은 가설검정을 위해 추정된 기대인플레이션율이 진정한 기대인플레이션인가에 대한 문제가 항상 존재하기 때문에 논쟁은 끝이 나지 않고 있다. 이 논문의 중요한 공헌 중 하나는 실제 관측할 수 없었던 기대인플레이션율을 실제 시장에서 거래되는 상품들 통해서 그 속에 내재되어 있는 기대인플레이션율을 찾아내었다는 점이다.

[그림 5] 추정된 순간 명목이자율과 실질이자율



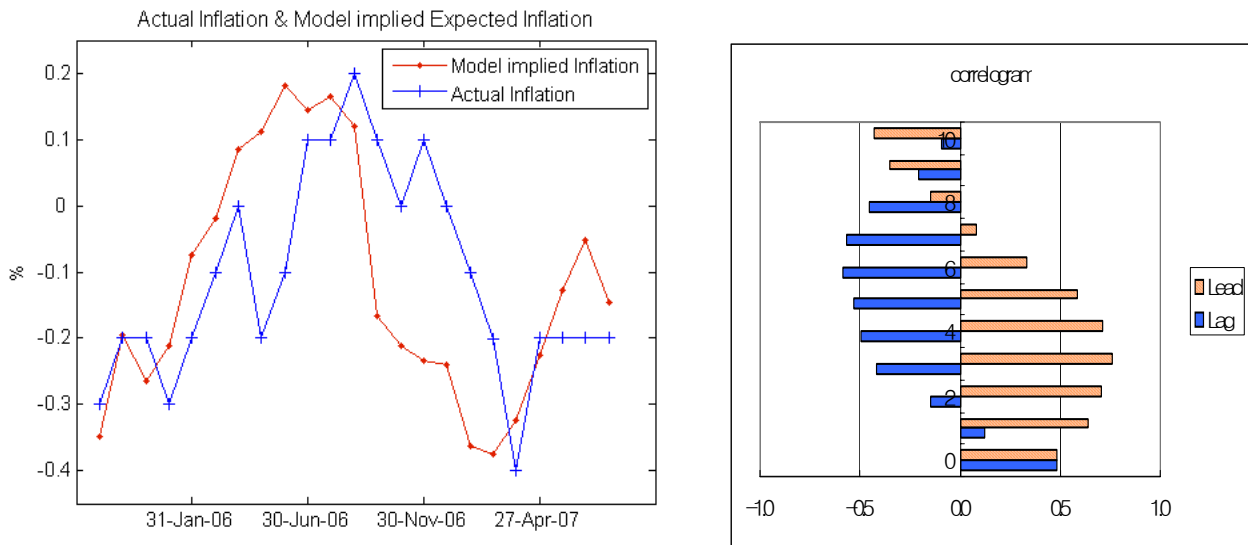
금융시장에서 흔히 간편한 방법으로 기대인플레이션율의 대리변수를 찾는 방법이 존재하는데, 실제 명목채권의 만기수익률에서 실질채권의 만기수익률을 빼서 만드는 BEI(Break-Even Inflation)가 그것이다. JGB 1의 만기수익률에서 JGBi 1의 만기수익률을 차감하여 만든 BEI는 [그림 6]와 같다.

[그림 6] 추정된 순간 기대인플레이션율과 BEI(Break-Even Inflation)



우리가 모형을 통해서 도출한 순간 기대인플레이션율과 실제 채권의 BEI간의 관계를 살펴보면 매우 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다. 이를 통계적으로 확인해보면, 두변수간의 상관계수는 0.91 로 거의 동일한 움직임을 보여준다. 회귀분석:  $\pi^e = \alpha + \beta BEI + \epsilon^{13}$  을 시행해본 결과 조정된 결정계수( $\bar{R}^2$ )가 0.83로 나타났으며  $\beta$ 는 1.21로 나타나 뚜렷한 관계가 있음이 확인된다. 즉 BEI는 기대인플레이션율의 대리변수로 사용해도 큰 문제는 없다고 해석된다. 그러나 BEI는 실제 과거 데이터를 통해서 만들었기 때문에 기대인플레이션율의 예측에는 사용할 수 없다는 단점을 지니며, 채권의 만기에 따라 수익률의 수준(level)이 달라지고 BEI의 수준이 달라지므로 정확한 기대인플레이션율의 수준은 알 수 없다는 단점을 지닌다.

[그림 7] 실제 인플레이션율과 추정된 기대인플레이션율간의 관계



13) 기대인플레이션율과 BEI의 각 변수는 시계열 자료의 특성인 단위근(unit root)이 존재할 가능성이 있기 때문에 차분변수,  $\pi^e = \pi^e(t+1) - \pi^e(t)$ ,  $BEI = BEI(t+1) - BEI(t)$  로 전환하여 회귀분석을 실시하였다. 차분변수의 단위근검정 결과, Augmented Dickey-Fuller test 통계량이 각각 -17.68, -16.87로 나타나 단위근이 없는 것으로 확인되며, 회귀분석결과는  $\alpha = 4.15e - 06$  ( $p$ 값 : 0.40),  $\beta = 1.21$  ( $p$ 값 :  $4.5e - 171$ ), 조정된  $R^2 = 0.83$  로 나타났다.

모형을 통해서 추정된 기대인플레이션율과 실제 인플레이션율 간의 관계를 살펴보면 모형의 기대인플레이션율은 실제 인플레이션율의 선행지수가 되고 있음을 [그림 7]의 좌측 그림에서 확인할 수 있다. 이를 통계적으로 확인해보면, [그림 7]의 우측 그림에서 보는 바와 같이 두 변수간의 상관관계수(correlation coefficient)는 0.485이며 시차를 두고 변수간 상관관계수를 확인해본 결과 모형상 기대인플레이션율이 실제 인플레이션율을 3개월 정도 선행하는 경우 가장 높은 상관관계수인 0.758 로 나타났다. 두 변수간의 관계를 회귀분석:  $AI_{t+3} = c + \beta MI_t + \epsilon^{14}$  으로 확인해본 결과  $\beta$ 는 0.66, 조정된 결정계수( $R^2$ )는 0.634로 나타났다. 모형상 기대인플레이션율이 실제 인플레이션율을 3개월의 시차를 두고 선행하고 있음을 확인할 수 있다. 즉 이 모형을 통해서 찾아낸 상품 속에 내재된 순간 기대인플레이션율은 실제 인플레이션율에 대한 선행지표로 역할을 하기 때문에 시장전체의 기대인플레이션율에 대한 좋은 지표로 해석될 수 있다.

## 제 4절. 가설검정(Hypothesis Test)

### 4.1. 왈드 검정(Wald Test)

$w$  요인은 물가연동부채권 자체의 고유한 요인이기 때문에 이론적으로는 존재하지 않아야 하는 요인이다. 그러나 모형에서 이 요인을 도입한 이유는 앞서서도 설명하였듯이 주성분분석(PCA)에 의해 요인들을 찾은 결과 물가연동부채권의 요인이 공통요인인 명목채권의 요인들로 전부 설명되지 않기 때문이다. 따라서  $w$  요인은 시장의 균형상태에서는 존재하지 않아야 하는 물가연동부채권 시장의 수요-공급(demand-supply) 요인으로 해석된다. 실제 일본의 경우 JGBi 시장의 수요-공급요인이 가격의 변동에 많은 영향을 주는 것으로 알려져 있다. 그렇다면  $w$  요인이 통계적으로 유의하게 가격에 영향을 미치고 있는지를 검정해보는 것은 물가연동부채권 시장의 효율성을 검정할 수 있는 흥미로운 주제일 것이다. 이를 검정하기 위한 귀무가설과 대립가설은 다음과 같다.

$$H_0: \delta_w = 0$$

$$H_1: \delta_w \neq 0$$

이를 검정하기 위한 검정통계량(test statistic)은 왈드검정에 따라 구성되며 다음과 같다.

14) MI는 모형상 기대인플레이션율이며 AI는 실제 인플레이션율이다. 실제 인플레이션율이 월별 자료이므로 두 변수의 비교를 위해 일별 모형상 기대인플레이션율 자료를 한달간 기하평균을 구하여 월별자료로 전환하였다. Augmented Dickey-Fuller test 통계량이 각각 -1.61, -4.39로 나타나 MI는 단위근(unit root)가 있으며 AI는 단위근이 없는 것으로 나타났다. 회귀분석결과는  $\alpha = 0.0002$ ( $p$ 값: 0.26),  $\beta = 0.663$ ( $p$ 값: 0.0), 조정된  $R^2 = 0.634$  로 나타났다.

$$W^2 = (\hat{\delta}_w - \delta_0)^2 \times \text{Var}(\hat{\delta}_w)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\delta}_w) &= I(\hat{\delta}_w)^{-1} \\ &= \text{Hessian}(\hat{\delta}_w)^{-1} \times (\text{Grad}(\hat{\delta}_w)^{-1} \times \text{Grad}(\hat{\delta}_w)^{-1})^{-1} \times \text{Hessian}(\hat{\delta}_w)^{-1} \end{aligned}$$

여기서  $\hat{\delta}_w$ 의 분산은 information 행렬의 역함수가 되고 이는 실제 모형에서 계산된 그레디언트와 헤시안에 의해 계산한 결과 다음과 같은 통계량을 얻게 된다.

$$W = \frac{\hat{\delta}_w - \delta_0}{\sqrt{I^{-1}(\hat{\delta}_w)}} = 79.3655$$

통계량의 결과 귀무가설은 기각된다. 즉, 물가연동부채권의 고유한 요인인 수요-공급요인은 통계적으로 유의하기 때문에 시장의 상대적인 수요-공급의 변화가 가격에 영향을 주는 것으로 확인된다. 수요-공급요인의 변화가 균형가격의 변화에 영향을 준다는 것은 시장이 효율적이지 못하다는 것으로도 해석할 수 있다.

#### 4.2. 피셔가설(Fisher Hypothesis) 검정

피셔가설(Fisher hypothesis)은 명목이자율과 기대인플레이션간의 1대 1의 상관관계가 있으며 실질이자율과 기대인플레이션은 상관관계가 없다는 가설이다. 피셔가설을 검정하기 위한 경제학의 오랜 연구결과들이 존재하지만 현실적으로 실질이자율과 기대인플레이션이 보이지 않는 변수들이기 때문에 변수측정의 오차가 항상 존재하여 논쟁이 끝나지 않는 주제이다. 이 연구에서는 시장에서 실제 거래되는 물가연동부채권을 이용하여 동상품에 내재되어있는 실질이자율과 기대인플레이션을 직접적으로 찾아낼 수 있으므로 제한적이긴 하지만 직접 모형으로 관측되는 변수들을 통해서 피셔가설을 검정해 볼 수 있기 때문에 기존 연구의 문제점을 극복한다는 장점이 있다. 모형상 실질이자율과 기대인플레이션의 상관계수(correlation coefficient)는 추정된 모수와 요인들을 통해 다음의 공분산 식을 이용하여 계산되며 그 결과는 <표 4>와 같다.

$$\begin{aligned} & \text{cov}(\pi^e, r) \\ &= \text{cov}(i - r, r) \\ &= (\delta_i + \beta_x x + \beta_y y - \delta_r - \alpha \phi_x x - \alpha \phi_y y - \delta_w w, \delta_r + \alpha \phi_x x + \alpha \phi_y y + \delta_w w) \\ &= (\beta_x - \alpha \phi_x)(\alpha \phi_x) \text{var}(x) + (\beta_y - \alpha \phi_y)(\alpha \phi_y) \text{var}(y) - \delta_w^2 \text{var}(w) \end{aligned}$$



<표 4> 명목이자율, 실질이자율, 기대인플레이션율 간의 상관계수<sup>15)</sup>

	$i$	$r$	$\pi^e$
$i$	1		
$r$	0.7177	1	
$\pi^e$	0.9298	-0.3647	1

실질이자율과 기대인플레이션율은 상관계수가 0이 되지 않고 음의 상관관계를 가지는 것으로 나타났다. 이는 피셔가설이 기각됨을 의미한다. 또한 모수들을 통해 계산된 순간 실질이자율과 기대인플레이션율이 아닌, 표본을 통해 구해진 순간 실질이자율과 기대인플레이션율 간의 상관계수 역시 -0.3385로 나타나 0이 되지 않기 때문에 피셔가설은 기각된다.

## 제 5장. 결론

이 연구의 목적은 물가연동부채권(Inflation-indexed bonds)의 현금흐름(cash flow)의 특징을 정확히 반영하는 가격평가 모형을 구축하는 것이다. 물가연동부채권은 연동되는 지수가 시차(lag)가 존재하기 때문에 완벽한 인플레이션 리스크를 헷징하지 못하게 되는 중요한 특징을 지니게 된다. 이러한 특징을 반영하는 기존의 연구결과가 존재하지 않는다는 점은 상품의 구조가 복잡하여 모형화하기 힘들다는 점을 반영한다.

본 논문에서는 이요인(two-factor) Vasicek 모형을 이용하여 상품구조의 특징을 정확히 반영하는 가격결정모형을 구축하였다. Vasicek 모형은 명목이자율이 음이 나올 수 있다는 단점을 지니고 있으나 단힌 해가 존재하기 하기 때문에 추정에 있어서 효율성과 정확성을 높여준다는 장점이 있다. 또한 다요인 모형을 통해서 상품 속에 내재된 순간이자율과 기대인플레이션율을 요인(factor)들을 체계적으로 설명할 수 있기 때문에 직접적으로 발견할 수 없었던 실질이자율과 기대인플레이션율을 구조적으로 설명할 수 있게 해준다.

모형의 검증을 위해서 일본의 JGBi 를 이용해서 실증분석을 한 결과 모수(parameter)들은 통계적으로 안정적이며 순간이자율들과 순간기대인플레이션율은 의미있게 도출되었다. 모형을 통해

15) 순간 명목이자율과 실질이자율, 기대인플레이션율간의 상관계수는 요인들의 과정(process)이 정상성(stationarity)을 만족한다고 가정한 모형에서 추정된 모수들에 의해 도출된 것이다. 이에 반해 표본에서 구해진 순간이자율들과 기대인플레이션율간의 상관계수를 구해보면 다음과 같다. 여기서 각 변수는 시계열의 특성인 단위근의 문제를 제거하기 위해 차분한 변수들이다.

	$di$	$dr$	$d\pi^e$
$di$	1		
$dr$	0.8294	1	
$d\pi^e$	0.2449	-0.3385	1

서 얻은 기대인플레이션율은 금융시장에서 간편히 기대인플레이션의 대리변수로 사용되고 있는 BEI의 움직임과 매우 유사하며, 실제 인플레이션율의 선행지수가 되는 것으로 나타났다. 모형상 기대인플레이션율은 시장에서 직접 거래되는 상품에서 도출되는 만큼 기존의 피셔가설(Fisher Hypothesis)를 검정하기 위한 연구들에서 기대인플레이션율을 직접 관측할 수 없기 때문에 발생하는 문제를 극복할 수 있게 해주는 장점을 지닌다. 상품에 내재된 기대인플레이션을 통해 피셔가설을 검정해본 결과 피셔가설은 기각되었다. 그리고 물가연동부채권만의 고유한 요인으로 도입된 수요-공급(demand-supply) 요인은 통계적으로 유의하게 나타나 물가연동부채권 시장의 상대적 수요-공급의 변화가 가격에 영향을 미치는 것으로 확인된다. 이는 일본의 JGBi 시장이 효율적이지 못하다는 것을 반증한다.

이 논문의 한계는 가격을 결정짓는 각 요인의 의미를 경제적 변수로 정확히 파악하지 못했다는 점과 물가연동부채권의 가격에 영향을 미치는 다양한 요인들, 예를 들어 세금(tax)과 같은 요인을 고려하지 못한 점 등을 들 수 있다. 이는 추후 연구되어야 할 과제로 남는다.

## 참 고 문 헌

- Ahn, D.H., Dittmar, R.F., and Gallant, A.R., (2002), "Quadratic gaussian models: Theory and evidence", *Review of Financial Studies*, No.15, pp 243-288.
- Alonso, F., Blanco, R., and A. de Rio (2001), "Estimation inflation expectations using French government inflation-indexed bonds", *Bank of Spain Working paper*, No.0111.
- Anderson, N. & Sleath, J. (2001), "New estimates of the UK real and nominal yield curves", *Bank of England Working Paper*, No.126.
- Ang, A. & Bekaert, G. (2003), "The Term Structure of real rates and expected inflation", *Columbia University and NBER Working Paper*, No.26.
- Arak, M. & Kreicher, L. (1985) "The real rate of interest: inferences from the new UK indexed gilts", *International Economic Review*, Volume 26, No.2, pp 399-408.
- Barr, D.G. and Campbell, J.Y. (1996), "Inflation, real interest rates, and the bond market: A study of UK nominal and indexed-linked Government Bond Prices", *NBER working paper*, no.5821.
- Barr, D.G. & Pesaran, B.P. (1995), "An assessment of the relative importance of real interest rates, inflation and term premia in determining the prices of real and nominal UK bonds", *Bank of England Working Paper*, No.32.
- Boshen, J.F. & Newman, J.L. (1987), "The effects of expected inflation on real returns in the Argentine indexed bond market", *Economic Letters*, Volume 25, pp 137-142.
- Breedon, F.J. & Chadha, J. (1997), "The information content of the inflation term structure", *Bank of England Working Paper*, No.75.
- Brown, R.H. & Schaefer, S.M. (1994), "The term structure of real interest rates and the Cox, Ingersoll, and Ross model", *Journal of Financial Economics*, Volume 35, No.1 pp 3-42.
- Campbell, J.Y. & Shiller, R.J. (1996), "A scorecard for indexed government debt", *Harvard Institute of Economic Research Discussion Paper*, No.1758.
- Chen, R.R., Lui, B., and Cheng, X. (2005), "Inflation, fisher equation, and the term structure of inflation risk premia: theory and evidence from TIPS", *Rutgers Business School, Working paper*.
- Chu, Q.C., Pittman, D.N., and Chen, J.H. (2007), "Inflation or disinflation? Evidence from maturing US Treasury Inflation-Protected Securities", *Applied Economics*, No.39.
- Côté, A., Jacob, J., Nelmes, J. and Whittingham, M. (1996), "Inflation expectations and Real Return Bonds", *Bank of Canada Review* (Summer), pp 41-53.
- Deacon, M.P. & Andrews, J.D. (1998), *Inflation-indexed securities*, John Wiley.
- Deacon, M.P. & Derry, A.J. (1994), "Deriving estimates of inflation expectations from the prices of UK government bonds", *Bank of England Working Paper*, No.23.
- Evans, M.D.D. (1998), "Real rates, expected inflation, and inflation risk premia",

- Journal of Finance*, No.53, pp 187-218.
- Evans, M.D.D. (2003), "Real risk, inflation risk, and the term structure", *Economic Journal*, No.113.
- Fama, E.F. (1975), "Short-term interest rates as predictors of inflation", *American Economic Review*, No.65.
- Fisher, I. (1930), *The Theory of interest rates*, McMillan.
- Fischer, S. (1975), "The demand for index bonds", *Journal of Political Economy* Volume 83, No.3, pp 509-534.
- Gilbert, C.L. (1995), "Alternative models for estimating real interest rates and expected inflation from UK index-linked bonds", *Queen Mary and Westfield College Draft Discussion Paper* (November).
- Gong, F.F. & Remolona, E.M. (1996), "Inflation risk in the US yield curve: The usefulness of indexed bonds", *Federal Reserve Bank of New York Research Paper*, No.9637.
- Goto, S. and Torous, W. (2003), "The conquest of US inflation: its implications for the Fisher hypothesis and the term structure of nominal interests", *UCLA working paper*.
- Huberman, G. & Schwert, G.W. (1985), "Information aggregation, inflation, and the pricing of indexed bonds", *Journal of Political Economy*, Volume 93, No.1, pp 92-114.
- Hunter, D.M. & Simon, D.P. (2002), "Are TIPS the real deal?: A conditional assessment of their role in a nominal portfolio", *University of South Florida and Bentley College mimeo* (1 July).
- Kandel, S., Ofer, A.R. & Sarig, O. (1996), "Real interest rates and inflation: An ex-ante empirical Analysis", *Journal of Finance*, Volume 51, No.1, pp 205-225.
- Kitamura, Y. (1997), "Indexed bonds and monetary policy: The real interest rate and the expected rate of inflation", *Bank of Japan Monetary and Economic Studies* (May).
- McCulloch, J.H. (1980), "The Ban on Indexed Bonds, 1933-77", *American Economic Review*, Volume 70, No.5, pp 1018-21.
- Mundell, R. (1963), "Inflation and real interest", *Journal of Political Economy*, No.71, pp 280-283.
- Munnell, A.H. & Grolnic, J.B. (1986), "Should the US Government Issue Index Bonds?", *Federal Reserve Bank of New England Economic Review* (September/October) pp 3-21.
- Price, R. (1997), "The rationale and design of inflation-indexed bonds", *International Monetary Fund Working Paper* 97/12.
- Risa, S. (2001), "Nominal and inflation indexed yields: separating expected inflation and inflation risk premia", SSRN, No. 265588.
- Robertson, D. & Symons, J. (1993), "Real interest rates and index-linked Gilts centre for economic performance", *LSE, Discussion Paper*, No.181.
- Sack, B. (2000), "Deriving inflation expectations from nominal and inflation-indexed treasury yields", *Federal Reserve Board mimeo* (May 16).

- Seppala, J. (2004), "The term structure of real interest rates: theory and evidence from the UK index-linked bonds", *Journal of Monetary Economics* No.51.
- Shen P. & Corning, J. (2001), "Can TIPS help identify long-term inflation expectations?", *Federal Reserve Bank of Kansas City Economic Review* (Fourth Quarter).
- Shiller, J.R. (2003), "The invention of inflation-indexed bonds in early America", *Yale University Working paper*.
- Spiro, P.S. (2003), "Evidence on inflation expectations from Canadian real return bonds", *Macroeconomic Analysis and Policy Branch, Ontario Ministry of Finance* (July).
- Tobin, J. (1965) "Money and economic growth", *Econometrica*, No.33, pp 671-684.
- Vasicek, O. (1977), "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, No.5, pp 177-188
- Wilcox, D.W (1998), "The introduction of indexed government debt in the United States", *Journal of Economic Perspectives*, No.12.
- Wilcox, D.W & Zervos, D. (1994), "Extracting real interest rates and inflation expectations from the UK Gilt market", *Federal Reserve Board mimeo* (October).
- Woodward, G.T. (1988), "Comment: The real rate of interest: Inferences from the new UK indexed gilts", *International Economic Review*, Volume 29, No.3, pp 565-68.
- Woodward, G.T. (1990), "The real thing: A dynamic profile of the term structure of real interest rates and inflation expectations in the United Kingdom, 1982-1989", *Journal of Business*, Volume 63, No.3 pp 373-98.